

## 主題 2 二元一次方程式的圖形

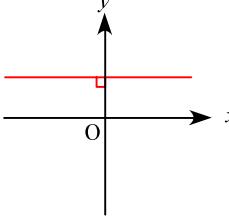
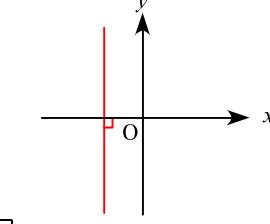
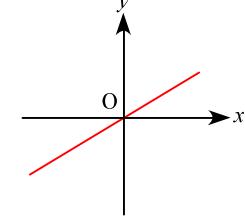
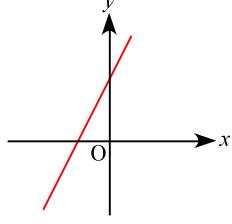
1. 二元一次方程式解的轉化：二元一次方程式的解，都可以用數對的形式描繪到坐標平面上，如右所示：



2. 二元一次方程式的圖形：表示一個二元一次方程式所有解的點，在坐標平面上所形成的圖形，就稱此為二元一次方程式的圖形。

3. 二元一次方程式圖形的畫法：二元一次方程式的圖形為一直線，因此畫二元一次方程式的圖形時，只要先找到方程式相異的兩解，再把表示這兩解的點用直線連起來即可。

4. 二元一次方程式圖形的類型：設直線方程式為  $ax + by = c$

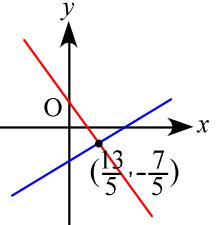
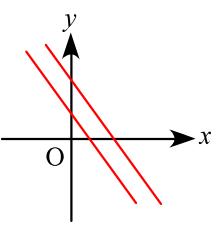
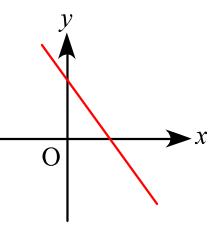
水平線(平行 $x$ 軸)(垂直 $y$ 軸)	鉛直線(平行 $y$ 軸)(垂直 $x$ 軸)	斜直線(過原點)	斜直線(不過原點)
$a=0, b\neq 0, c\neq 0$	$a\neq 0, b=0, c\neq 0$	$a\neq 0, b\neq 0, c=0$	$a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$
例： $3y=8$  註：若 $c=0$ ，則圖為 $x$ 軸	例： $5x=-2$  註：若 $c=0$ ，則圖為 $y$ 軸	例： $2x-3y=0$ 	例： $3x-2y=-6$ 

5. (補充)直線與斜率：(1) 若平面上有兩點  $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ ，則斜率定義為  $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ 。

(2) 若  $m > 0$ ，則直線為左下右上走向， $m < 0$ ，則為左上右下走向， $m = 0$  為水平線。

(3) 若直線方程式  $y = mx + k$ ，則其中  $m$  表示斜率， $k$  表示與  $y$  軸的交點正負。

6. 二元一次聯立方程式的圖形及解的意義：畫出兩個二元一次方程式的直線圖形

$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$
方程式解的意義	恰有一組解	無解	無限多組解
圖形	兩直線相交於一點	兩直線平行	兩直線重合
	$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x - y = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 6x + 4y = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 6x + 4y = 10 \end{cases}$
例子			

## 7. 二元一次方程式圖形相關題型的解題技巧：

求直線方程式			
過已知兩點	過 $(a,b)$ 且平行 $x$ 軸	過 $(a,b)$ 且平行 $y$ 軸	與 $ax+by=c$ 平行
① 設直線方程式為 $y=ax+b$ ② 已知兩點代入 ③ 解聯立，求 $a$ 、 $b$	直線方程式為 $y=b$	直線方程式為 $x=a$	設直線方程式為 $ax+by=k$ ( $k \neq c$ )

(2) 求方程式係數：將點坐標代入。

(3) 求兩直線交點：解聯立方程式。

8. (補充)直線的平行與垂直：設兩直線方程式分別為  $L_1 : y=m_1x+k_1$ ， $L_2 : y=m_2x+k_2$ ，若

$$(1) L_1 \parallel L_2, \text{ 則 } m_1 = m_2 \quad (2) L_1 \perp L_2, \text{ 則 } m_1 \times m_2 = -1$$

9. (補充)兩點式求直線方程式：若直線  $L$  通過兩點  $P(x_1, y_1)$ ， $Q(x_2, y_2)$ ，則此直線方程式為

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \quad (\text{公式觀念：} R(x, y) \text{為 } L \text{ 上任意點，則 } \overline{RP} \text{ 斜率} = \overline{QP} \text{ 斜率})$$

### 小叮嚀：

1. 若數對 $(x_1, y_1)$ 是二元一次方程式  $ax+by=c$  的解，則  $ax_1+by_1=c$ 。
2. 若點 $(x_2, y_2)$ 在直線  $ax+by=c$  的圖形上，則  $ax_2+by_2=c$ 。
3.  $x$  軸的方程式為  $y=0$ ， $y$  軸的方程式為  $x=0$ 。
4. 在坐標平面上，畫二元一次聯立方程式的圖形所得兩直線交點坐標就是此聯立方程式的解；  
反之，聯立方程式的解在坐標平面上的位置就是其圖形兩直線的交點。
5. 與直線  $ax+by=c$  平行的直線方程式可設為  $ax+by=k$ ，其中  $k \neq c$ 。

### ◆◆觀念澄清是非題◆◆

1. 若直線  $5x+4y+k-7=0$  的圖形通過原點，則  $k=7$ 。
2. 在坐標平面上，直線  $y=5x-6$  的圖形不通過第四象限。
3. 在坐標平面上，方程式  $x=a$  的圖形是一條水平線， $y=b$  的圖形是一條鉛垂線。
4. 通過 $(5, 8)$ 且垂直  $x$  軸的直線方程式為  $y=8$ 。
5. 在坐標平面上，直線  $x=2-5y$  與  $3x+15y=6$  的圖形會重合。
6. 在坐標平面上，直線  $x=2-5y$  與  $3x-15y=6$  的圖形互相平行。