主題 2　二元一次聯立方程式

1. 二元一次聯立方程式：當用兩個未知數列出兩個二元一次方程式來記錄題目中的數量關係時，可以把他們整理成$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$的形式，此形式便是二元一次聯立方程式。

2. 二元一次聯立方程式的解：將一組數對$(x，y)$代入二元一次聯立方程式，可以使每個方程式等號兩邊的值都相等時，就稱該數對$(x，y)$為這個聯立方程式的解。

例：將(2，3)代入聯立方程式$\begin{cases} 3x+2y=12 \\ -2x+5y=11 \end{cases}$得$\begin{cases} 3\times2+2\times3=12 \rightarrow \text{成立} \\ -2\times2+5\times3=11 \rightarrow \text{成立} \end{cases}$

所以(2，3)為此聯立方程式的解。

3. 解二元一次聯立方程式：

方法	代入消去法	加減消去法
原理	用一式代入另一式消去一個未知數	用兩式相加或相減消去一個未知數
使用時機	(1) 有一未知數的係數為 1 或－1 時 (2) 有一位知數係數相等或有倍數關係	(1) 當一未知數的係數相等或互為相反數時 (2) 當一未知數的係數成倍數關係時
技巧	將其中一方程式化成 $y=ax+b$ 或 $x=cy+d$ 的形式	相同未知數之係數相等時→將兩式相減 相同未知數之係數互為相反數時→將兩式相加
例子	$\begin{cases} 3x+y=12 \\ -2x-y=11 \end{cases}$，$\begin{cases} y=3x-12 \\ -2x-5y=18 \end{cases}$	$\begin{cases} 5x+3y=2 \\ -6x-3y=-3 \end{cases}$，$\begin{cases} 5x+6y=2 \\ 2x-3y=-3 \end{cases}$

註：若聯立方程式不是形如$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$時，先移項整理再解之。

4. 特殊型聯立方程式的解法：

$A=B=C$ 型	$A^2+B^2=0$ 型	$\lvert A\rvert+\lvert B\rvert=0$ 型	對稱型
解$\begin{cases} A=B \\ B=C \end{cases}$或$\begin{cases} A=C \\ B=C \end{cases}$或$\begin{cases} A=B \\ A=C \end{cases}$	解$\begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$	解$\begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$	$\begin{cases} ax+by=c_1 \\ bx+ay=c_2 \end{cases}$ 由兩式相加及相減化簡。
例： $3x+2y+5=2x+y-5=7x+4$ 解$\begin{cases} 3x+2y+5=2x+y-5 \\ 2x+y-5=7x+4 \end{cases}$	例： $(x+3y-6)^2+(2x-y+5)^2=0$ 解$\begin{cases} x+3y-6=0 \\ 2x-y+5=0 \end{cases}$	例： $\lvert x+3y-6\rvert+\lvert 2x-y+5\rvert=0$ 解$\begin{cases} x+3y-6=0 \\ 2x-y+5=0 \end{cases}$	例：$\begin{cases} 77x+23y=54 \\ 23x+77y=46 \end{cases}$ 解： 相加得 $x+y=1$ 相減得 $11x-11y=2$

5. (補充)無限多組解與無解的聯立方程式：在二元一次聯立方程式$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1\cdots(1) \\ a_2x+b_2y=c_2\cdots(2) \end{cases}$中，

若將(1)式×k後可得$a_2x+b_2y=c_3$，則：

(1) 當$c_3=c_2$時，此聯立方程式有無限多組解。

(2) 當$c_3\neq c_2$時，此聯立方程式無解。

例：$\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 6x+4y=10 \end{cases}$有無限多組解，而$\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 6x+4y=9 \end{cases}$則無解。

6. (補充)二元一次聯立方程式係數比與解的關係：

在二元一次聯立方程式$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$中			
係數比	$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$
聯立方程式解的情形	唯一一組解	無限多組解	無解

小叮嚀：

1. 解聯立方程式時，當未知數的係數是分數或小數時，應先化成整數在解之。

2. 當二元一次聯立方程式不是形如$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$者，應先移項整理再解之。

◇◆觀念澄清是非題◆◇

(　　)1. $x=3$，$y=8$是二元一次聯立方程式$\begin{cases} 5x+2y=1 \\ 2x-y=2 \end{cases}$的解。

(　　)2. 解二元一次聯立方程式$\begin{cases} 5x-2y=1\cdots(1) \\ 2y=-x+2\cdots(2) \end{cases}$時，將(2)式代入(1)式得$5x-2(-x+2)=1$。